

## 数字几何处理中 Laplace-Beltrami 算子的离散化理论与应用研究综述

范 典<sup>1,2)</sup>, 刘永进<sup>1,2)\*</sup>, 贺 英<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(清华大学计算机系 北京 100084)

<sup>2)</sup>(清华信息科学与技术国家实验室(筹) 北京 100084)

<sup>3)</sup>(南洋理工大学计算机学院 新加坡)

(liuyongjin@tsinghua.edu.cn)

**摘 要:** 数字几何处理的主要研究对象是三维空间中的二维曲面, Laplace-Beltrami 算子是定义在黎曼流形上的微分算子, 其在网格曲面上的离散形式在三维模型分析等应用中具有重要作用, 是一类基本的几何工具. 不同的离散方法具有不同的数学性质, 所适用的应用场景也不相同. 文中对 Laplace-Beltrami 算子的离散化理论与应用进行综述, 希望能够使读者对该算子的功能有基本了解, 对数字几何处理的最新研究进展有进一步的认识, 并对未来的研究方向及应用前景有所启发.

**关键词:** 计算机图形学; 数字几何; Laplace-Beltrami 算子; 离散化  
中图法分类号: TP391

## Recent Progress in the Laplace-Beltrami Operator and Its Applications to Digital Geometry Processing

Fan Dian<sup>1,2)</sup>, Liu Yongjin<sup>1,2)\*</sup>, and He Ying<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(Department of Computer Science, Tsinghua University, Beijing, 100084)

<sup>2)</sup>(National Laboratory for Information Science and Technology, Tsinghua University, Beijing, 100084)

<sup>3)</sup>(School of Computer Engineering, Nanyang Technological University, Singapore)

**Abstract:** Digital geometry processing focus on 2-dimensional surfaces in 3-dimensional space. Laplace-Beltrami operator is a differential operator defined on Riemannian manifolds. Discrete Laplace-Beltrami operator is a useful tool in applications such as 3-dimensional model analysis. Diverse methods of discretization lead to distinct mathematical properties related to the applications they aim at respectively. This paper provides a survey on theory and application of discrete Laplace-Beltrami operator. We hope this paper can provide some help for researchers to learn how Laplace-Beltrami operator works in digital geometry processing with in-depth understanding and identify possible directions for further research and new applications.

**Key words:** computer graphics; digital geometry; Laplace-Beltrami operator; discretization

拉普拉斯贝尔特拉米算子(Laplace-Beltrami operator)是定义在黎曼流形上的二阶微分算子, 是在欧氏空间中的拉普拉斯算子(Laplace operator)的一种推广, 本质上描述了空间中某点函数值与其

邻域均值差异这一特征, 它在包括数学和物理在内的诸多自然科学领域发挥着重要的作用.

数字几何处理是计算机图形学中重要的组成部分, 其主要研究对象为嵌在三维空间中的二维

收稿日期: 2015-03-15; 修回日期: 2015-03-30. 基金项目: 国家自然科学基金(61432003,61322206,61272228); 清华大学自主科研计划(20131089252); 可视媒体智能处理与内容安全北京高校工程研究中心项目. 范 典(1992—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为数字几何处理; 刘永进(1977—), 男, 博士, 副教授, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算几何、计算机图形学; 贺 英(1974—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为计算机科学中的几何计算.

曲面. 由于计算机图形学中广泛采用离散化采样技术, 三维模型通常使用网格或者点云的形式进行离散化表示, 相应的 Laplace-Beltrami 算子的离散形式也越来越多地受到广泛的关注.

从计算曲率<sup>[1-2]</sup>开始 Laplace-Beltrami operator(以下简称 LBO 算子)被引入数字几何处理, 后来在网格曲面处理<sup>[3-5]</sup>及三维模型分析<sup>[6-7]</sup>中得到广泛的应用. LBO 算子在图像处理<sup>[8-10]</sup>, 信号处理<sup>[11-12]</sup>, 求解偏微分方程<sup>[8,13-14]</sup>等方面也有所涉及. 因为不同的应用场景对于该算子所需要满足的数学性质要求不尽相同, 所以便衍生出了种类繁多但又不能相互替代的离散方法.

关于 LBO 算子离散化的计算理论与计算方法在过去得到了广泛的研究, 在三角网格上基于余切的离散化方法<sup>[15-16]</sup>已经比较成熟, 针对其收敛性的讨论始终是关注的焦点. 近年来发展出基于热核<sup>[17]</sup>的计算理论, 在收敛性方面有重要突破, 它的适用范围可以延伸到多边形网格<sup>[18]</sup>与点云<sup>[19-20]</sup>之上, 应用的领域也得到了拓展.

本文将从理论、方法与应用 3 个方面进行展开: 首先给出了该算子的数学背景及基本性质, 并介绍离散化的不同计算理论; 然后列举了一些离散化的具体方法并进行分析, 并讨论各种应用与该算子联系; 最后对全文进行总结.

## 1 预备知识

### 1.1 Laplace 算子及其在黎曼流形上的推广

Laplace 算子是欧氏空间中作用于标量函数  $f$  的二阶微分算子, 其定义为梯度  $(\nabla f)$  的散度  $(\nabla \cdot f)$ , 任意二阶可微函数  $f$  对应的 Laplace 算子即  $\Delta f$  表达式为

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f.$$

在  $n$  维笛卡儿坐标系下函数  $f$  的 Laplace 算子可以写成非混合二阶偏导数的和, 即

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

二维极坐标系与三维球坐标系中 Laplace 算子的表达式也可通过坐标变换推出.

Laplace 算子可以用来描述许多物理现象, 如波动方程、泊松方程等. 将 Laplace 算子推广到黎曼流形上就得到了 LBO 算子, 根据黎曼流形梯度和散度的定义, 若  $g$  为流形上的度量张量, 则函数  $f$  的 LBO 算子在局部坐标系中表示为

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right).$$

对于复杂曲面很难得到该式的显示表达, 对于简单曲面有如下结论——平面 LBO 算子与 Laplace 算子保持形式上一致, 单位球面函数  $f(\theta, \varphi)$  的 LBO 算子显示表达式为

$$\nabla_{S^2}^2 f(\theta, \varphi) = (\sin \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + (\sin \varphi)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f.$$

该式给出了球面上某点 LBO 算子的解析解, 常常被用来计算真值作为与离散化方法得到的近似解进行误差分析, 对收敛性的分析起到了重要的作用.

### 1.2 离散 LBO 算子及其基本性质

首先给出网格曲面上离散 LBO 算子的定义: 在顶点数为  $n$  的三角网格  $M$  上定义函数  $f$ , 则该函数在顶点  $v_i$  处的离散 LBO 算子即  $Lf(v_i)$  可以写成如下形式<sup>[21-22]</sup>

$$Lf(v_i) \sum_{j=1}^n \omega_{ij} (f(v_i) - f(v_j)) \quad (1)$$

也就是说, 作用于函数  $f$  上的离散 LBO 算子在  $f(v_i)$  处的取值由该顶点函数值  $f(v_i)$  与其他顶点函数值  $f(v_j)$  之差的线性组合表示. 由于  $Lf(v_i)$  具备上述形式,  $\omega_{ij}$  的选取就显得举足轻重, 系数矩阵所满足的数学性质决定了离散方法质量的高低. 理想的 LBO 算子应当满足 4 个条件<sup>[22]</sup>:

对称性—— $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ .

局部性——当且仅当  $v_i$  与  $v_j$  相邻时  $\omega_{ij} \neq 0$ .

线性——对平面上的线性函数有  $Lf(v_i) = 0$ .

正权值——当  $i \neq j$  时  $\omega_{ij} > 0$ .

实际上, 对于一个任意网格均满足上述 4 个条件的离散方法是不存在的<sup>[22]</sup>. 因此需要根据应用的需求进行取舍, 例如提出网格需要满足的限制条件, 或者有选择的不考虑其中某项性质.

离散 LBO 算子面临的最大挑战来自于收敛性问题. 随着采样点数目的增加, 三角网格收敛于连续曲面,  $Lf$  是否收敛于  $\Delta f$ ? 在什么条件下收敛于  $\Delta f$ ? 早期研究中给出了多种评价方式<sup>[21,23-25]</sup>, Wardetzky<sup>[26]</sup>总结了离散 LBO 算子收敛的 4 个等价命题, 并以此作为判断不同离散化方法优劣的重要依据.

## 2 计算理论

式(1)给出了离散 LBO 算子的基本形式, 之后

的研究大多围绕着  $\omega_{ij}$  系数矩阵的取值展开. 在相关计算理论被提出之前, 人们凭借经验对  $\omega_{ij}$  进行简单的猜测, 但由此导出的离散方法并不能给出很好的近似结果. 通过研究该算子相关的数学问题, 人们对于  $\omega_{ij}$  取值的形式有了更清晰的认识, 在此基础上拓展出许多实用的算法.

### 2.1 狄利克雷能量

狄利克雷能量(Dirichlet's energy)是描述函数可变性的概念, 其与定义域的梯度向量场有关. 满足 LBO 算子等于零的函数称为调和函数, 它与 Dirichlet's energy 的极值点存在对应关系, 因此可以在网格上通过求离散 Dirichlet's energy 在顶点处的偏导数得到该点离散 LBO 算子的值.

关于 Dirichlet's energy 的离散化有如下结论: 若函数  $f$  是作用于网格中某三角面片上的线性映射, 则该区域对应的 Dirichlet's energy 表达式<sup>[27-28]</sup>为

$$E_D(f_{tri}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \cot \alpha_i \cdot |l_i|^2 \quad (2)$$

其中  $\alpha_i$  表示映射前三角形的内角,  $|l_i|$  表示映射后三角形的边长. 式(2)对函数  $f$  在三角形某顶点  $v_1$  处求偏导数, 并将  $|l_i|$  改写成  $|f(v_{i-1}) - f(v_{i+1})|$  的形式得到

$$\frac{\partial}{\partial f(v_1)} E_D(f_{tri}) = \frac{1}{2} [\cot \alpha_2 \cdot |f(v_1) - f(v_3)| + \cot \alpha_3 \cdot |f(v_1) - f(v_2)|].$$

对于网格上某顶点  $v_i$ , 若对其周围三角形面片能量求和, 然后计算其偏导数并合并同类项, 就得到该点对应离散 LBO 算子的值<sup>[28-29]</sup>

$$Lf(v_i) = \frac{\partial}{\partial f(v_i)} \sum_{v_j \in Neigh(v_i)} E_D(f_{jth-tri}) = \frac{1}{2} \sum_{v_j \in Neigh(v_i)} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j) \cdot |f(v_i) - f(v_j)| \quad (3)$$

其中  $\alpha_j$  和  $\beta_j$  分别表示连接  $v_i$  和  $v_j$  的边  $e_{ij}$  两侧的对角,  $Neigh(v_i)$  表示与顶点  $v_i$  相邻的顶点的集合. 将该方法求得的表达式与  $Lf(v_i)$  的一般形式进行对比可知

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 0.5(\cot \alpha_j + \cot \beta_j), & \text{if } v_j \in Neigh(v_i) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

该式给出了离散 LBO 算子的系数矩阵  $\omega_{ij}$  满足对角余切求和的形式, 是许多离散方法及实际应用的重要基础, 对于离散 LBO 计算理论的发展具有开创性的贡献, 并在随后一段时间中得到了广泛的研究和改进.

### 2.2 平均曲率向量

平均曲率向量<sup>[15]</sup>的计算是函数  $f(x) = x$  时

LBO 算子的特例, 也是重要的应用之一. 因此通过研究计算离散网格平均曲率的方法, 对 LBO 算子系数的确定起到指导作用.

考察平均曲率向量在网格上某顶点邻域内的积分, 根据等价关系将其写成梯度的散度形式, 由多元微积分中高斯定理的相关知识可知, 该积分等于梯度与单位法向量的点积在区域边界的积分, 其公式为

$$\iint_{A_M} K(x) dA = - \iint_{A_M} \text{div} \nabla(x) dA = - \iint_{\partial A_M} \nabla(x) \cdot \mathbf{n} dl;$$

其中  $A_M$  为积分区域,  $\partial$  表示区域的边界,  $\mathbf{n}$  为单位法向量. 类似地, 对顶点周围的三角形面片分别进行求解, 记其中一个  $\Delta_{ijk}$  的 3 个顶点为  $v_i, v_j, v_k$ ; 对  $v_i$  有

$$\iint_{\partial A_M \cap \partial \Delta_{ijk}} \nabla(v_i) \cdot \mathbf{n} dl = \frac{1}{2} \nabla(v_i) \cdot [v_j - v_k]^\perp \quad (4)$$

$$\nabla(v_i) = \frac{1}{2A} [(v_j - v_i)([v_i - v_k]^\perp)^T + (v_k - v_i)([v_j - v_i]^\perp)^T] \quad (5)$$

其中  $\perp$  表示逆时针旋转  $90^\circ$ ,  $A$  表示三角形面积.

由于三角形的面积可以由边长及其夹角的正弦表示, 向量的点积可以由长度及其夹角的余弦表示, 结合式(4)(5)并对  $v_i$  周围的所有的三角形求和, 可以将平均曲率向量的积分写成

$$\iint_{A_M} K(v_i) dA = \frac{1}{2} \sum_{v_j \in Neigh(v_i)} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j) (v_i - v_j) \quad (6)$$

与之前的理论相比, 该式右侧的系数具有相同的表达形式, 而左侧引入了邻域面积这一概念, 这对基于余切的计算理论而言是重要的拓展. 在随后的研究中, 讨论了邻域面积的确定依据, 并验证了在  $f(x) = x$  以外的函数上按该理论计算 LBO 算子也能取得更好的结果.

### 2.3 热核函数

热传导方程是描述区域内温度随时间变化的偏微分方程, 可以推广为 LBO 算子的表达形式, 求解该方程需要引入热核这一概念. 若  $u(x, t)$  表示时间  $t$  对应的温度分布函数, 则

$$\Delta_S u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S H_S^t(x, y) f(y) dv(y).$$

该式<sup>[17]</sup>体现了某点  $x$  的温度由区域内其他点对该点的贡献共同决定, 热核  $H_S^t(x, y)$  反映了 2 点之间相互影响程度的大小, 一般而言其具有的显式表达为

$$H_S^t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right).$$

由于热核公式与 LBO 算子之间建立直接联系比较困难, 所以需要引入一个中间函数进行过渡, 即泛函拉普拉斯算子(functional Laplace operator), 其定义为

$$F_S^h f(w) = \frac{1}{4\pi h^2} \int_{x \in S} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) \cdot (f(x) - f(w)) dv(x).$$

该式与热核公式有部分相似. 相关数学研究表明, 对曲面  $S$  上二阶连续的函数  $f$ , 当参数  $h \rightarrow 0$  时,  $F_S^h f(w)$  与  $\Delta_S f(w)$  的差在无穷范数意义下的极限等于 0, 泛函拉普拉斯算子收敛于曲面 LBO 算子<sup>[17, 30]</sup>. 若得到一个定义在网格  $M$  上的离散函数  $L_M^h f(w)$ , 使之在极限意义下收敛于泛函拉普拉斯算子, 就完成了由网格上到曲面上 LBO 算子的近似, 并在理论上保证了良好的收敛性.

热核公式的提出打破了余切公式在离散 LBO 算子计算理论方面的垄断地位, 基于热核公式的离散化方法是近年来研究的热点, 它在收敛性方面的优势推动了相关应用的优化进展.

### 3 计算方法

关于离散 LBO 算子的具体计算方法的研究也经历了漫长的历史过程. 一方面, 计算理论的发展指导了计算方法的发展, 但在实现的过程中会遇到各种问题, 需要后续的研究进行解释和修正. 另一方面, 不同的应用对计算方法关注的重点不同, 有的只分析系数矩阵特征值的分布, 有的则对收敛性提出了很高的要求. 正是由于计算理论与实际应用都具有多元化的属性, 根据所针对问题的不同, 计算方法在框架或者细节方面都有或多或少的差异, 因而需要对各种计算方法及其特性进行必要的总结和比较.

首先对本节中所涉及的主要符号进行说明:  $S$  表示三维空间中的二维曲面,  $M$  表示离散化的网格模型,  $V$  表示网格模型顶点的集合,  $E$  表示网格模型边的集合,  $v \in V, e \in E$  分别表示对应集合内的元素,  $F$  表示网格模型面片的集合.  $\Delta f$  和  $Lf$  分别表示曲面和网格上函数  $f$  的 LBO 算子;  $V_N(v)$  表示顶点  $v$  周围相邻顶点的集合,  $E_N(v)$  表示顶点  $v$  周围相邻边的集合,  $F_N(v)$  表示顶点  $v$  周围相邻面片的集合,  $A$  表示某区域的面积,  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示  $e$  两侧对应角,  $\Delta_\alpha$  和  $\Delta_\beta$  表示  $e$  两侧对应三角形.

出于研究问题的特征及实际应用的需要, 离散 LBO 算子有时会相差一个符号. 本节所涉及的所有方法均统一写成基本形式

$$Lf(v_i) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} (f(v_i) - f(v_j)).$$

#### 3.1 Taubin 框架

Taubin 框架<sup>[11, 31-32]</sup>是一种网格光滑的方法, 是早期重要的研究成果之一. Taubin 框架对  $\omega_{ij}$  的取值提出了如下的要求

$$\omega_{ij} = \frac{\phi(v_i, v_j)}{\sum_{v_k \in V_N(v_i)} \phi(v_i, v_k)};$$

其中  $\phi(v_i, v_j)$  为满足对称性的正值函数, 显然有  $\sum_{v_k \in V_N(v_i)} \omega_{ik} = 1$ . Taubin 框架给出了 3 种具体的选择方式<sup>[11, 33]</sup>

$$\phi(v_i, v_j) = 1,$$

$$\phi(v_i, v_j) = A(\Delta_{\alpha_{ij}}) + A(\Delta_{\beta_{ij}}),$$

$$\phi(v_i, v_j) = \|e_{ij}\|^\lambda.$$

该框架相对于  $\omega_{ij} = 1$  的伞式算子<sup>[34]</sup>有归一化的优势, 而  $\phi(v_i, v_j) = 1$  的方法与基于顶点度数的 Tutte 方法<sup>[35]</sup>等价(注意到  $\phi$  对称时  $\omega$  不一定对称).

Taubin 框架是 LBO 算子在网格光滑应用方面一次有益的初步尝试, 显然还有许多不尽如人意需要改进的地方. 仅仅是基于经验进行  $\phi(v_i, v_j)$  的选择, 并没有充分的理论依据予以支持, 线性准确性不能得到保证, 收敛性方面也没有保证. 但其关于对称性、局部性、正权值等属性的探索还是具有很好的指导意义.

#### 3.2 余切方法

关于余切的计算理论导出了原始的计算方法, 即式(6)给出的  $\omega_{ij} = 0.5 \cdot (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})$ <sup>[33]</sup>, 在实际应用中得到了不断的完善. Desbrun 等<sup>[16]</sup>将余切方法<sup>[16, 36]</sup>与 Taubin 框架结合在一起, 使得系数满足归一化条件

$$\omega_{ij} = \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{\sum_{v_k \in V_N(v_i)} [\cot \alpha_{ik} + \cot \beta_{ik}]}.$$

实验表明, 该方法在网格光滑的应用中相比之前的方法可以更好地保持原始网格的形状, 体现了计算理论指导下系数选择能够进一步改善其性能.

余切方法所面临的问题在于  $\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}$  在  $\alpha_{ij} + \beta_{ij} > \pi$  时会出现负数取值, 这对于纹理映射等应用有着不利的影响. 后续的研究在不改变计算方法的情况下, 对输入模型进行预处理, 给出了基于 Delaunay 三角化的解决方案<sup>[37-38]</sup>.

Delaunay 三角化(Delaunay triangulation)<sup>[39]</sup>是满足 $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ 不大于 $\pi$ 的三角化方法. 满足该条件时,  $\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}$ 取值非负, 在网格模型上对其进行一定的拓展<sup>[40]</sup>, 允许三角形的边是沿网格表面的测地直线<sup>[41]</sup>在重新三角化的网格上进行计算, 可以使纹理映射取得更好的效果.

Delaunay 三角化提供了一种全新的思路, 记  $output = algorithm(input)$ , 在  $algorithm$  确定的情况下, 改变  $input$  也会影响  $output$ . 这样, 一方面, 解决了不规则三角化导致  $\omega_{ij}$  取负值的问题; 另一方面, Delaunay 三角化的唯一性与该算子只依赖黎曼度量的属性相吻合.

### 3.3 面积系数

将平均曲率的计算理论推广到一般的函数  $f$  并适当选取邻域面积的权重, 就可以得到改进形式的余切方法, 两者的公式只相差一个面积系数  $A_i$ , 即

$$Lf(v_i) = \frac{1}{2A_i} \sum_{v_j \in V_N(v_i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (f(v_i) - f(v_j)).$$

Desbrun 等<sup>[16]</sup>首先给出了  $A_i$  的一种直观的选取方法, 即该顶点周围三角面片面积的总和, 其表达式可以写成  $A_i = \sum_{\Delta_j \in F_N(v_i)} A(\Delta_j)$ .

该方法定义的邻域相互之间有所重叠, 对不规则网格适应性较差.

Meyer 等<sup>[15]</sup>提出了在网格顶点计算 Voronoi 图<sup>[42]</sup>, 以各个顶点 Voronoi 区域面积进行计算, 可以保证各顶点邻域之间互不相交, 且每个面元都在与之距离最近的顶点对应邻域之中.

对于锐角三角形组成的网格, Voronoi 区域的面积比较容易计算, 而并非所有网格都满足这一条件, 因此需要引入  $A_{Mixed}$  这一概念对 Voronoi 区域的面积进行估计. 对锐角三角形直接计算顶点对应的 Voronoi 区域面积, 对钝角三角形的锐角顶点估计为三角形面积的四分之一, 而钝角顶点估计为三角形面积的一半. Meyer 等通过计算曲率等应用并与之之前的几种方法进行比较, 得出该方法在网格模型不规则时计算结果具有一定优势的结论.

### 3.4 热核方法

Belkin 等<sup>[17]</sup>给出了基于热核的离散 LBO 算子的表达式

$$L_M^h f(v_i) = \frac{1}{4\pi h^2} \sum_{f_i \in F} \frac{A(f_i)}{\#f_i} \sum_{v_j \in V(f_i)} e^{-\frac{\|v_i - v_j\|^2}{4h}} (f(v_i) - f(v_j));$$

其中  $\#f_i$  表示面片的顶点数目.  $(\varepsilon, \eta)$  是一组描述网

格与曲面接近程度的参数, Belkin 等证明了若  $h$  满足  $h(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{\varepsilon^{2.5+\alpha}} + \eta^{\frac{1}{1+\alpha}}$ , 则当网格  $M$  收敛于曲面  $S$  时,  $L_M^h$  在无穷范数的意义下也收敛于  $F_S^h$ .

Wardetzky<sup>[26]</sup>和 Xu<sup>[21]</sup>研究了此前余切方法的收敛性, 指出一般情况下的二阶收敛不能保证. Xu<sup>[21]</sup>提出的收敛性更好的方法需要进一步的离散化. 热核方法在收敛性方面取得了突破性的进展, 在平面及球面上分别取不同类型的函数, 与  $\Delta f$  的显式表达进行对比验证了收敛性的存在.

由于  $L_M^h$  并不依赖于网格的三角特性, 因此热核方法有向多边形网格拓展的潜力. 热核方法虽然具有很好的适应性与收敛性, 但采用指数衰减方法代替局部性特征导致矩阵不够稀疏, 计算测地距离的代价与使用欧氏距离的误差等也制约了该方法的普遍应用.

### 3.5 点云方法

对嵌在高维空间中的低维流形, 通常经过采样得到点云作为其离散化表示. Belkin 等<sup>[19]</sup>提出了不依赖全局网格模型, 在切空间中进行局部三角化的方法, 并给出在点云中计算  $k$  维流形上对应 LBO 算子的方法.

对点云中的采样点  $p$ , 首先使用 Har-Peled 等<sup>[43]</sup>的方法求出其切空间  $T_p$ ; 对所有与  $p$  距离不大于  $\delta$  的点构成的点集  $P_\delta$ , 将其投影到  $T_p$  并进行局部 Delaunay 三角化得到  $K_\delta$ , 记该投影的逆为  $\Phi$ . 由此给出的计算方法为

$$L_P^t f(p) = \frac{1}{(4\pi t)^{k/2}} \sum_{\sigma \in K_\delta} \frac{A(\sigma)}{k+1} \sum_{q \in V(\sigma)} e^{-\frac{\|p - \Phi(q)\|^2}{4t}} (f(p) - f(\Phi(q))).$$

Liu 等<sup>[20]</sup>在研究流形调和谱分析时发现, 由于第一个求和符号的存在, Belkin 方法不能保证对称性, 因此引入了 Voronoi 区域的概念予以修正. Liu 等给出了  $k = 2$  时 Belkin 方法的改进公式<sup>[20]</sup>

$$L_P^b f(p) = \frac{1}{4\pi t^2} \sum_{q \in P_\delta} e^{-\frac{\|p - q\|^2}{4t}} (f(p) - f(q)) A_{Voronoi}(q),$$

并证明了该方法的收敛性. 随后的实验结果表明, Liu 方法比非对称 Belkin 方法取得的结果要好, 作为对比直接将 Belkin 方法转化为对称形式的尝试是失败的.

### 3.6 多边形网格

离散 LBO 算子计算方法的最新进展来自于多边形网格方面. Alexa 等<sup>[18]</sup>从黎曼流形度量出发,

给出了多边形网格上离散 LBO 算子的构造方法, 其对非凸及非平面情形依然适用。

首先将黎曼流形上的 LBO 算子写成外导数的形式, 其离散化由各点各边之间关系决定, 即

$$L = d * d = M_0^{-1}(d^T M_1 d);$$

其中  $M_0$  和  $M_1$  分别表示点与边导出的内积, 适当选取  $M_0$  和  $M_1$  即可得到对应的余切公式。

Alexa 等拓展了 Wardetzky 等<sup>[22]</sup>给出的 LBO 算子应满足的数学性质, 并在研究局部性特征时提出将矩阵  $M_1$  表示为一系列  $M_f$  求和的形式。对于某多边形面  $f$ , 将其投影到各边中点  $B_f$  确定的平面上,  $|f|$  为其投影面积, 则由此导出  $M_f$ <sup>[18, 44-45]</sup> 为

$$\widetilde{M}_f = \frac{1}{|f|} B_f B_f^T,$$

$$M_f = \widetilde{M}_f + C_{\bar{f}} U_{\bar{f}} C_{\bar{f}}^T.$$

Alexa 给出了  $C_{\bar{f}}$  和  $U_{\bar{f}}$  的选取方法。  $M_0$  是一个对角矩阵, 其元素为  $(M_0)_{pp} = \sum_{p \in f} \frac{|f|}{k_f}$ ; 其中  $k_f$  表示  $f$  的边数。由此便得到了完整的离散 LBO 算子。三角网格是多边形网格的特例, 故也适用于该方法。多边形网格上离散 LBO 算子是理论研究的又一重大突破, 如何将多边形网格结合到实际应用中去将会是未来研究的热点。

## 4 实际应用

LBO 算子作为描述诸多物理现象的基本数学工具, 推动了物理和数学相关应用的发展。对于计算机学科而言, LBO 算子应用的领域也很广泛, 例如偏微分方程的数值解法、数字图像处理与数字信号处理等。数字几何处理中许多的应用也与离散 LBO 算子之间有着广泛的关联, 本文并不期望将所有应用一一列举出来, 而是基于使用 LBO 算子的不同方式, 从曲面的光滑这一基本应用出发, 通过几个典型的例子使读者能够直观地理解 LBO 算子如何在数字几何处理的应用中发挥作用。

### 4.1 直接法

曲面光滑这一应用顾名思义, 就是对一张粗糙的、有噪声的网格进行处理, 消除噪声使网格变得平滑, 从而改善模型的视觉感观效果。Desbrun 等<sup>[16]</sup>给出了基于隐式积分的网格光滑算法框架, 从热传导的角度将网格光滑理解为如下过程: 网格上局部的噪声随着时间的变化与周围的区域相容消散, 而网格的整体形状在整个过程中不会产生突变。该框架给出了网格光滑过程中迭代产生网格序列

的热传导方程表示  $\frac{\partial M}{\partial t} = \lambda L(M)$ ; 其中  $M$  表示网格,  $L(M)$  表示其系数矩阵。若用  $M_i$  表示第  $i$  轮迭代生成的中间网格, 则当时间  $dt$  充分小时, 该式可以写作

$$M_{n+1} = (I + \lambda dt L) M_n \quad (7)$$

适当选取参数和终止条件便可以生成充分光滑的网格。

所谓直接法, 就是在输入已知的情况下, LBO 算子直接参与运算得到结果的过程。如同上述曲面光滑给出的迭代过程, 只需进行矩阵乘法就能实现。

平均曲率向量的计算非常好地体现了直接法的作用。关于计算理论的探讨中我们给出了平均曲率向量与 LBO 算子之间的关系, 而网格的平均曲率向量场也具有非常简单的表达  $K(M) = LM$ 。

平均曲率向量的长度即为平均曲率, 描述网格表面弯曲程度的大小, 根据法线方向有正负之分。图 1 中给出了 Armadillo 模型表面曲率的分布情况, 凹处曲率为正, 凸处曲率为负, 颜色越深弯曲程度越大。平均曲率还有许多相关的应用, 如曲面扩散流<sup>[13]</sup>等。平均曲率向量在 LBO 算子的应用清晰地描述了两者之间存在一种相辅相成的关系, 从最初平均曲率向量在网格上的离散化指导 LBO 算子系数的选取, 到后来 LBO 算子的最新研究提供了更准确的平均曲率向量的计算方法, 以及 LBO 算子收敛性的验证中平均曲率向量的计算是其中不可缺少的环节, 均由  $f(x) = x$  这一层最紧密的联系所决定。

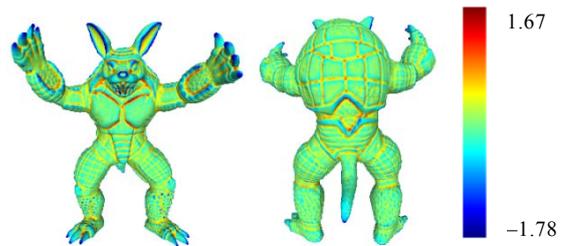


图 1 用 Meyer<sup>[15]</sup>方法计算 Armadillo 模型曲率

一般而言, 直接法用于  $f(x)$  已知且输入与输出关系明确的场合, 计算简单是其重要的优点。然而, 一般情况下其适用条件并不容易满足, 因而在某些应用中使用, 需要使用下文描述的方法进行补充。

### 4.2 方程组求解

式(7)给出的网格光滑算法属于向前欧拉法, 其稳定性并不能得到保证, Desbrun 等<sup>[16]</sup>将其转换成如下形式

$$M_{n+1} = (I + \lambda dt L)M_n = IM_n + \lambda dt LM_n$$

替换后一个  $M_n$  为  $M_{n+1}$

$$\rightarrow IM_n + \lambda dt LM_{n+1};$$

从而将该问题转化为求解线性方程组

$$(I - \lambda dt L)M_{n+1} = M_n.$$

该方法属于向后欧拉法, 其稳定性是无条件成立的, 不需要对  $dt$  进行约束, 从而可以在更短的时间内达到想要的结果.

所谓方程组求解, 就是等式右端给出一些限制条件, LBO 算子参与方程组系数的生成, 从而反解出  $f(x)$  在网格上取值的过程, 通常情况下需要求解对应的最小二乘问题.

纹理映射等应用中体现了 LBO 算子与方程组相结合的思想. 所谓纹理映射, 就是网格模型的三维坐标与二维平面的纹理坐标的一一对应, 希望该映射尽可能保持原网格上的几何关系, 包括边长、角度、面积等都可以视作在每个三角形上定义线性映射并使其离散化的 Dirichlet's energy 最小化的问题. 考虑到边界条件的存在, 该方程的一般形式<sup>[46]</sup>为

$$MU = \begin{bmatrix} M_{\text{internal}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\text{internal}} \\ U_{\text{boundary}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{\text{boundary}} \end{bmatrix} = C;$$

其中  $C_{\text{boundary}}$  表示边界点需要满足的限制条件,  $U_{\text{internal}}$  和  $U_{\text{boundary}}$  表示内部和边界上各点的纹理坐标,  $M_{\text{internal}}$  表示 Dirichlet's energy 在非边界点的偏导数系数, 其具体数值为

$$M_{ij} = \begin{cases} \cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}, & v_j \in V_N(v_i) \\ -\sum_{v_k \in V_N(v_i)} M_{ik}, & i = j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

该矩阵系数就是式(3)中计算理论给出的余切形式, 它保持映射前后三角形的形状尽可能不变. 图 2 中给出了纹理映射的示意图, 从左往右依次为原始网格、纹理坐标和映射效果, 该方法可以得到较好的结果. 如果用 LBO 算子的其他公式代入, 可以得到相应的保长度、保面积意义下的纹理映射算法. 需要注意的是, 若  $\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}$  存在负值, 可能出现纹理坐标向内翻折的情形(网格三角形按顺时针方向, 纹理坐标按逆时针方向), 因此使用 Delaunay 三角化后的网格进行处理可以得到更好的结果.

方程组求解往往用于  $f(x)$  没有显式表达的场合, 通过问题需求给出的条件予以限定并进行反解, 可以视作直接法的逆运算, 其适用的范围稍大于前者, 但更广泛的应用往往采取第 4.3 节中的方式.

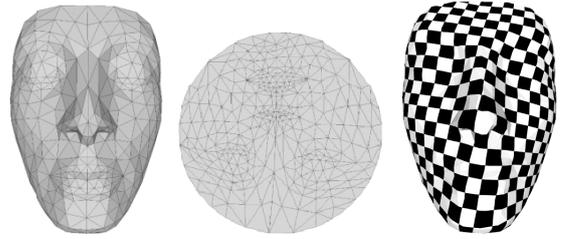


图 2 用 Desbrun<sup>[46]</sup>方法将棋盘纹理映射到人脸模型

### 4.3 特征值问题

网格光滑不仅可以通过向前或向后的迭代法实现, 也可以基于信号处理中的离散傅里叶分析进行推广<sup>[11]</sup>. 将原始网格的每个顶点看作是不同的频段信号的组合, 其中高频的部分视作噪声需要被光滑处理, 离散 LBO 算子确定了系数矩阵, 将原始信号投影到特征值展开的空间上, 较大的特征值对应的特征向量维度上的分量可以作为噪声去掉. 这便是基于特征值问题的网格光滑算法. 图 3 中给出了 kitten 模型投影到不同规模特征子空间的结果, 从左往右依次为(20/800/全部), 可以看出, 保留特征数目与模型精细程度正相关, 基本达到了网格光滑的预期效果.

LBO 算子的特征值问题与一般矩阵的特征值问题类似, 已知其系数矩阵  $L$ , 求特征值  $\lambda$  和特征向量  $H$  使之满足  $LH = \pm \lambda H$ .

一般而言, 谱分析中要求特征值为实数, 故采用的离散化方法必须满足使系数矩阵  $L$  具有对称性. 该方法求得的特征值和特征向量可以提取很多流形上的特征, 如体积、边界长度和分类示性数等. 所有特征值和特征向量组成了该流形的一组调和基, 体现了曲面本身所固有的属性<sup>[19,47]</sup>, 在谱分析的相关应用中发挥了重要的作用<sup>[48-49]</sup>, 接下来会列举其中一部分并进行简要的分析.

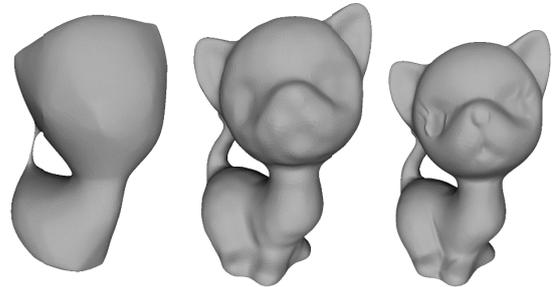


图 3 LBO 谱分析: 特征值重构的模型

#### 4.3.1 网格匹配

网格匹配是形状分析的重要应用. 由于网格模型结构一般比较复杂, 很难通过直接比较的方

法判断其相似性. 和其他领域分类算法的主导思想类似, 我们需要一组特征对网格模型进行描述.

Reuter 等<sup>[47]</sup>提出了 ShapeDNA 方法, 其基本思路是基于 LBO 算子计算系数矩阵前  $n$  个特征值组成网格模型的特征向量. 该方法利用了矩阵的特征值在相似变换中保持不变的特性, 更好地反映了网格模型的内蕴特性. 在用于检测同一模型的不同姿势, 或同一姿势的不同模型等问题时有着更好的表现. Lian 等<sup>[50]</sup>将 ShapeDNA 与一些典型方法进行比较后的结果表明, ShapeDNA 的效果比较理想. 基于谱分析的特征提取方法近年来也取得了一些新的结果<sup>[51-52]</sup>. Hu 等<sup>[51]</sup>则给出了另一种基于谱分析的特征提取方法.

#### 4.3.2 网格分割

对网格模型进行形状分析时, 往往需要对其进行分割. Lévy 等<sup>[53]</sup>在研究流形上 LBO 算子的特征函数时, 提出了 nodal set 和 nodal domain 的概念. 对每一个特征函数  $f_\lambda$ , 经特征函数运算后为零的集合得到 nodal set, 按照流形上各点  $f_\lambda$  符号的正负生成对应的 nodal domain, 就得到了流形的一个自然的分割. Reuter 等<sup>[54-55]</sup>使用有限元方法在网格模型上进行求解和构造, 并分析了其正确性、鲁棒性和敏感性等.

与此同时, 还有另一种基于特征点的网格分割方法<sup>[56-57]</sup>. 首先将网格模型投影到 LBO 算子较小特征值对应特征向量张成的子空间上, 通过计算其凸包的手段得到一系列所谓特征点; 再利用等势分析得到每个特征点对应的分割区块, 并附加了特征点合并等优化策略, 以使得分割的结果与几何形态相吻合.

#### 4.3.3 热核签名

当热核理论引入 LBO 算子的计算之后, 与之相关的应用也取得了一定的进展. Sun 等<sup>[58]</sup>根据曲面上的热传导过程, 给出了称为热核签名的形状描述方式. 首先将热核写成特征分解的形式

$$H_S^t(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y) \quad (8)$$

其中  $\lambda_i$  和  $\phi_i$  分别表示 LBO 算子的第  $i$  个特征值和特征方程. 曲面的热核签名定义为时刻  $t$  时式(8)对角线位置的值, 即  $HKS(x, t) = H_S^t(x, x)$ .

在一定的假设条件下(如特征值互不相同), 热核签名包含了曲面上的所有信息, 也可由其导出曲率与扩散距离等. 热核签名<sup>[7,58]</sup>在实际计算时采

用了 Belkin 等<sup>[17]</sup>的离散化方法.

#### 4.3.4 其他谱分析应用

谱分析是基于矩阵特征问题的一大类应用方向, 还有许多应用中直接或间接地利用了这种思想. 它们包括但不仅限于如下几项数字几何处理的应用: 对网格模型进行参数化时边界的确定<sup>[59-60]</sup>, 如何在网格模型上添加数字水印<sup>[61-64]</sup>, 检测网格模型中所包含的对称性特征<sup>[65-66]</sup>, 压缩网格模型数据规模以便进行传输<sup>[64,67-68]</sup>, 网格与网格之间点与点的对应关系<sup>[69-70]</sup>, 由原始曲面生成四边形网格<sup>[71-73]</sup>等.

在计算机图形学以外的许多相关领域应用也可以利用 LBO 算子的谱分析进行研究. 在机器学习方面, 对高维空间中邻近的数据点建立连接关系, 将其投影到低维特征子空间上可以更好地适应流形学习算法<sup>[74]</sup>. 在图像处理方面, 可以提取内蕴几何特征并将其转换为高维网格模型; 再分析该模型的 LBO 算子, 以完成图像识别等功能<sup>[75-76]</sup>.

综上所述, 以 LBO 算子作为基础的数学工具, 其应用渗透了数字几何处理的方方面面, 并以多种多样的形式为计算机图形学的发展做出了重要的贡献.

## 5 总结展望

本文针对 LBO 算子在数字几何处理中的研究, 从预备知识, 计算理论, 计算方法, 实际应用等几个方面探讨了 LBO 算子的离散化. 计算理论方面依据研究背景的不同分别进行了介绍, 并结合具体应用进行了归纳和总结. 余切方法为 LBO 算子离散化奠定了基础, 目前得到了广泛的应用. 热核方法的出现为 LBO 算子离散化的收敛性提供了重要理论依据, 但基于热核方法的计算是一个全局操作, 不能像余切方法那样可以局部计算, 因此在具有时间要求的实际应用中有较大的局限性. 研究具有局部性、同时具有收敛性的 LBO 算子是今后一个重要的热点研究方向. 在三维数字几何应用中, 除了已经得到广泛研究的三角网格外, 三维数字几何的其他表示形式(比如点云和多边形网格)也是 LBO 算子应用今后可能的重要研究方向, 在这个方向上, 包括点云和多边形网格上的热核方法误差控制及数值稳定性等的研究具有重要的理论价值和实际工程应用价值.

## 参考文献(References):

- [1] Chen X, Schmitt F. Intrinsic surface properties from surface triangulation[C]//Proceedings of 2nd European Conference on Computer Vision. Berlin: Springer, 1992: 739-743
- [2] Hamann B. Curvature approximation for triangulated surfaces[M]//Farin G, Noltemeier H, Hagen H, *et al.* Geometric modeling. Vienna: Springer, 1993,8: 139-153
- [3] Bajaj C L, Xu G. Anisotropic diffusion of surfaces and functions on surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(1): 4-32
- [4] Clarenz U, Diewald U, Rumpf M. Anisotropic geometric diffusion in surface processing[C]//Proceedings of the Conference on Visualization. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2000: 397-405
- [5] Bertalmio M, Sapiro G, Cheng L T, *et al.* A framework for solving surface partial differential equations for computer graphics applications[R]. Mathematics Department, Los Angeles: CAM Report 00-43, University of Los Angeles, 2000
- [6] Bronstein M M, Kokkinos I. Scale-invariant heat kernel signatures for non-rigid shape recognition[C]//Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Piscataway: IEEE Computer Society Press, 2010: 1704-1711
- [7] Schneider R, Kobbelt L. Geometric fairing of irregular meshes for free-form surface design[J]. Computer aided geometric design, 2001, 18(4): 359-379
- [8] Kimmel R, Malladi R, Sochen N. Image processing via the Beltrami operator[M]//Chin R, Pong T C. Computer Vision—ACCV'98, vol 1. Berlin: Springer, 1997: 574-581
- [9] Weickert J. Anisotropic diffusion in image processing[M]. Stuttgart: Teubner, 1998
- [10] Taubin G. Geometric signal processing on polygonal meshes[OL]. [2015-03-15]. <http://www.cs.jhu.edu/~misha/Fall07/Papers/Taubin00.pdf>
- [11] Taubin G. A signal processing approach to fair surface design[C]//Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1995: 351-358
- [12] ter Haar Romeny, Bart M, *et al.* Geometry-driven diffusion in computer vision[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994
- [13] Mayer U F. Numerical solutions for the surface diffusion flow in three space dimensions[J]. Computational and Applied Mathematics, 2001, 20(3): 361-379
- [14] Sheffer A, Hormann K, Levy B, *et al.* Mesh parameterization: theory and practice[C]//Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New York: ACM Press, 2007: Course Notes
- [15] Meyer M, Desbrun M, Schröder P, *et al.* Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds[M]//Hege H C, Polthier K. Visualization and mathematics III. Berlin: Springer, 2003: 35-57
- [16] Desbrun M, Meyer M, Schröder P, *et al.* Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow[C]//Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1999: 317-324
- [17] Belkin M, Sun J, Wang Y. Discrete laplace operator on meshed surfaces[C]//Proceedings of the 24th Annual Symposium on Computational Geometry. New York: ACM Press, 2008: 278-287
- [18] Alexa M, Wardetzky M. Discrete Laplacians on general polygonal meshes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2011, 30(4): Article No.102
- [19] Belkin M, Sun J, Wang Y. Constructing Laplace operator from point clouds in  $R^d$ [C]//Proceedings of the 20th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics Press, 2009: 1031-1040
- [20] Liu Y, Prabhakaran B, Guo X. Point-based manifold harmonics[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2012, 18(10): 1693-1703
- [21] Xu G. Convergence of discrete Laplace-Beltrami operators over surfaces[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2004, 48(3): 347-360
- [22] Wardetzky M, Mathur S, Kälberer F, *et al.* Discrete Laplace operators: no free lunch[C]//Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2007: 33-37
- [23] Xu G. Discrete Laplace-Beltrami operators and their convergence[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(8): 767-784
- [24] Belkin M, Niyogi P. Convergence of Laplacian eigenmaps[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2007, 19: 129
- [25] Dey T K, Ranjan P, Wang Y. Convergence, stability, and discrete approximation of Laplace spectra[C]//Proceedings of the 21st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics Press, 2010: 650-663
- [26] Wardetzky M. Convergence of the cotangent formula: an overview[M]//Bobenko A I, Sullivan J M, Schröder P, *et al.* Discrete Differential Geometry, vol. 38. Berlin: Birkhäuser Basel Press, 2008: 275-286
- [27] Dziuk G. Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces[M]. Berlin: Springer, 1988
- [28] Pinkall U, Polthier K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates[J]. Experimental Mathematics, 1993, 2(1): 15-36
- [29] Wilson W L. On discrete Dirichlet and Plateau problems[J]. Numerische Mathematik, 1961, 3(1): 359-373
- [30] Belkin M, Niyogi P. Towards a theoretical foundation for Laplacian-based manifold methods[M]//Auer P, Meir R. Learning theory, vol. 3559. Berlin: Springer, 2005: 486-500
- [31] Zhang H. Discrete combinatorial Laplacian operators for digital geometry processing[C]//Proceedings of SIAM Conference on Geometric Design and Computing. Brentwood: Nashboro Press, 2004: 575-592
- [32] Polthier K. Computational aspects of discrete minimal surfaces[OL].[2015-03-15]. <http://www.polthier.info/articles/msriClay/msriClay.pdf>
- [33] Fujiwara K. Eigenvalues of Laplacians on a closed Riemannian

- manifold and its nets[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1995, 123(8): 2585-2594
- [34] Kobbelt L, Campagna S, Vorsatz J, *et al.* Interactive multi-resolution modeling on arbitrary meshes[C]//Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. New York: ACM Press, 1998: 105-114
- [35] Tutte W T. How to draw a graph[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1963, 13(3): 743-768
- [36] Desbrun M, Meyer M, Schröder P, *et al.* Discrete differential-geometry operators in  $nD$ [OL]. [2015-03-15]. [http://cs.engr.uky.edu/~cheng/PUBL/Paper\\_Discrete.pdf](http://cs.engr.uky.edu/~cheng/PUBL/Paper_Discrete.pdf)
- [37] Bobenko A I, Springborn B A. A discrete Laplace–Beltrami operator for simplicial surfaces[J]. Discrete & Computational Geometry, 2007, 38(4): 740-756
- [38] Liu Y J, Xu C X, He Y, *et al.* The duality of geodesic Voronoi/Delaunay diagrams for an intrinsic discrete Laplace–Beltrami operator on simplicial surfaces[C]//Proceedings of the 26th Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG. 2014:125-132
- [39] Delaunay B. Sur La sphere vide[J]. Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk, 1934, 7(793-800): 1-2
- [40] Fisher M, Springborn B, Bobenko A I, *et al.* An algorithm for the construction of intrinsic Delaunay triangulations with applications to digital geometry processing[C]//Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New York: ACM Press, 2006: 69-74
- [41] Zhao Junli, Xin Shiqing, Liu Yongjin, *et al.* A survey on computing geodesic distances on meshes[J]. Scientia Sinica Informationis, 2015, 45(3): 313-335 (in Chinese)  
(赵俊莉, 辛士庆, 刘永进, 等. 网格模型上的离散测地线综述[J]. 中国科学: 信息科学, 2015, 45(3): 313-335)
- [42] Liu Y J, Chen Z, Tang K. Construction of iso-contours, bisectors, and Voronoi diagrams on triangulated surfaces[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(8): 1502-1517
- [43] Har-Peled S, Varadarajan K. Projective clustering in high dimensions using core-sets[C]//Proceedings of the 18th Annual Symposium on Computational Geometry. New York: ACM Press, 2002: 312-318
- [44] Brezzi F, Lipnikov K, Simoncini V. A family of mimetic finite difference methods on polygonal and polyhedral meshes[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2005, 15(10): 1533-1551
- [45] Perot J B, Subramanian V. Discrete calculus methods for diffusion[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 224(1): 59-81
- [46] Desbrun M, Meyer M, Alliez P. Intrinsic parameterizations of surface meshes[J]. Computer Graphics Forum, 2002, 21(3): 209-218
- [47] Reuter M, Wolter F E, Peinecke N. Laplace–Beltrami spectra as ‘Shape-DNA’ of surfaces and solids[J]. Computer-Aided Design, 2006, 38(4): 342-366
- [48] Vallet B, Lévy B. Spectral geometry processing with manifold harmonics[J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(2): 251-260
- [49] Zhang H, van Kaick O, Dyer R. Spectral methods for mesh processing and analysis[C]//Proceedings of Eurographics State-of-the-art Report. Oxford: Blackwell Publishing Ltd, 2007: 1-22
- [50] Lian Z, Godil A, Bustos B, *et al.* SHREC'11 Track: shape retrieval on non-rigid 3D watertight meshes[J]. Eurographics Workshop on 3D Object Retrieval, 2011, 11: 79-88
- [51] Hu J, Hua J. Salient spectral geometric features for shape matching and retrieval[J]. The Visual Computer, 2009, 25(5-7): 667-675
- [52] Dubrovina A, Kimmel R. Matching shapes by eigendecomposition of the Laplace-Beltrami operator[C]//Proceedings of International Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2010, 2(3)
- [53] Lévy B. Laplace-Beltrami eigenfunctions towards an algorithm that "understands" geometry[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2006: 13-14
- [54] Reuter M, Biasotti S, Giorgi D, *et al.* Discrete Laplace–Beltrami operators for shape analysis and segmentation[J]. Computers & Graphics, 2009, 33(3): 381-390
- [55] Reuter M. Hierarchical shape segmentation and registration via topological features of Laplace-Beltrami eigenfunctions[J]. International Journal of Computer Vision, 2010, 89(2/3): 287-308
- [56] Liu R, Zhang H. Mesh segmentation via spectral embedding and contour analysis[J]. Computer Graphics Forum, 2007, 26(3): 385-394
- [57] Katz S, Leifman G, Tal A. Mesh segmentation using feature point and core extraction[J]. The Visual Computer, 2005, 21(8-10): 649-658
- [58] Sun J, Ovsjanikov M, Guibas L. A concise and provably informative multi-scale signature based on heat diffusion[J]. Computer graphics forum, 2009, 28(5): 1383-1392
- [59] Mullen P, Tong Y, Alliez P, *et al.* Spectral conformal parameterization[J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(5): 1487-1494
- [60] Sheffer A, Hormann K, Levy B, *et al.* Mesh parameterization: Theory and practice[C]//Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New York: ACM Press, 2007: Course Notes
- [61] Cotting D, Weyrich T, Pauly M, *et al.* Robust watermarking of point-sampled geometry[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2004: 233-242
- [62] Wu J, Kobbelt L. Efficient spectral watermarking of large meshes with orthogonal basis functions[J]. The Visual Computer, 2005, 21(8-10): 848-857
- [63] Liu Y, Prabhakaran B, Guo X. A robust spectral approach for blind watermarking of manifold surfaces[C]//Proceedings of the 10th ACM Workshop on Multimedia and Security. New York: ACM Press, 2008: 43-52
- [64] Cayre F, Rondao-Alface P, Schmitt F, *et al.* Application of spectral decomposition to compression and watermarking of 3D triangle mesh geometry[J]. Signal Processing: Image Communication, 2003, 18(4): 309-319
- [65] Ovsjanikov M, Sun J, Guibas L. Global intrinsic symmetries of shapes[J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(5): 1341-1348
- [66] Raviv D, Bronstein A M, Bronstein M M, *et al.* Diffusion symmetries of non-rigid shapes[C]//Proceedings of International

- al Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2010:2
- [67] Karni Z, Gotsman C. Spectral compression of mesh geometry[C]//Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 2000: 279-286
- [68] Chen M B, Gotsman C. On the optimality of spectral compression of mesh data[J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, 24(1): 60-80
- [69] Jain V, Zhang H. Robust 3D shape correspondence in the spectral domain[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2006: Article No.19
- [70] Wu H Y, Wang L F, Luo T, *et al.* 3D shape consistent correspondence by using Laplace-Beltrami spectral embeddings[C]//Proceedings of the 8th International Conference on Virtual Reality Continuum and Its Applications in Industry. New York: ACM Press, 2009: 307-309
- [71] Dong S, Bremer P T, Garland M, *et al.* Spectral surface quadrangulation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 1057-1066
- [72] Huang J, Zhang M, Ma J, *et al.* Spectral quadrangulation with orientation and alignment control[J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(5): 147
- [73] Ling R, Huang J, Sun F, *et al.* Spectral quadrangulation with boundary conformation[R]. Hong Kong : The University of Hong Kong, TR-2011-13,2011
- [74] Belkin M, Niyogi P. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation[J]. Neural Computation, 2003, 15(6): 1373-1396
- [75] Peinecke N, Wolter F E, Reuter M. Laplace spectra as fingerprints for image recognition[J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(6): 460-476
- [76] Reuter M, Wolter F E, Shenton M, *et al.* Laplace-Beltrami eigenvalues and topological features of eigenfunctions for statistical shape analysis[J]. Computer-Aided Design, 2009, 41(10): 739-755